

Modèle de Bernoulli

Soit n un entier plus grand que 1. On considère le modèle de Bernoulli $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, (P_\theta^n)_{\theta \in [0,1]})$ où $\mathcal{X} = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de $\mathcal{X}$ et pour tout $\theta \in [0, 1]$ P_θ^n est la loi d'un n -échantillon de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\theta)$. On note $X_1, \dots, X_n$ les applications coordonnées sur $\mathcal{X}$ et on définit $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Exercice 1. (a) Montrer que pour tout $\theta \in [0, 1]$, pour tout $\alpha \in]0, 1]$ on a

$$P_\theta^n \left(|\bar{X} - \theta|^2 \geq \frac{\theta(1-\theta)}{n\alpha} \right) \leq \alpha.$$

(b) Pour $m \in [0, 1]$ et $\alpha \in]0, 1]$, résoudre l'inéquation (en l'inconnue x)

$$(m - x)^2 \geq x(1-x)/(n\alpha)$$

(c) En utilisant les deux résultats précédents, construire un intervalle de confiance pour θ de niveau de confiance $1 - \alpha$ où $\alpha \in]0, 1]$.

Exercice 2. Pour chaque $\theta \in [0, 1]$ on définit la variable aléatoire (avec la convention $0/0 = 1$)

$$L_\theta = \theta^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n X_i}.$$

(a) Montrer que pour toute variable aléatoire $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\forall \theta \in [0, 1] \quad E_\theta^n[T] = \sum_{x \in \mathcal{X}} L_\theta(x) T(x).$$

(b) En déduire que pour toute variable aléatoire $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $\theta \mapsto E_\theta^n[T]$ est dérivable sur $]0, 1[$ et que

$$\forall \theta \in]0, 1[\quad \frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta^n[T] = E_\theta^n \left[T \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L_\theta) \right].$$

(c) Soit T un estimateur sans biais de θ c'est-à-dire qui satisfait

$$\forall \theta \in [0, 1] \quad E_\theta^n[T] = \theta.$$

Montrer que $\forall \theta \in]0, 1[\quad E_\theta^n \left[(T - \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L_\theta) \right] = 1$. En déduire que

$$\forall \theta \in]0, 1[\quad E_\theta^n[(T - \theta)^2] E_\theta^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log(L_\theta) \right)^2 \right] \geq 1.$$

Calculer $E_\theta^n \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log(L_\theta) \right)^2 \right]$ pour $\theta \in]0, 1[$. Que peut-on en conclure ?